全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品高考 第二轮专题



主编 肖德好

沈阳出版社

全品
— SINCE 1992 —
教育图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品高考
第二轮专题

本册主编
邵立武
副 主 编
谢文龙
编　　者
邵立武　谢文龙　王健平　徐诗祺
赵鹤鹏　徐宇廷　索艳敏　伯　雪
庞　月　王新蕾
特约主审
高金剑　沈　骏　王奇平

主编　肖德好

数学
听课手册

沈阳出版社

CONTENTS 目录

01 高考专题整合

- **思想篇** 数学思想方法的应用 …… 001
- **方法篇** 选择题的特殊解法 …… 005
- **自习篇** 基础知识自主练习 …… 007

模块一 三角函数、解三角形与平面向量

第 1 讲 三角恒等变换 …… 009
第 2 讲 三角函数的图象与性质 …… 011
品点拨 1 三角函数中 ω,φ 的范围与最值问题 …… 013
点拨 1 与对称性有关的问题　点拨 2 与单调性有关的问题
点拨 3 与零点有关的问题
第 3 讲 平面向量 …… 014
第 4 讲 解三角形 …… 017
品点拨 2 “爪型”三角形问题 …… 020
点拨 1 角平分线型　点拨 2 中线型
点拨 3 定比分点型　点拨 4 高线型

模块二 数列

第 5 讲 等差数列、等比数列 …… 022
第 6 讲 求递推数列的通项公式 …… 025
第 7 讲 数列求和 …… 027
第 1 课时 裂项相消与错位相减法求和 …… 028
第 2 课时 并项求和与分组求和 …… 029
品点拨 3 数列的函数特性 …… 030
点拨 1 利用单调性求最大项　点拨 2 数列与导数的结合
品点拨 4 重构数列 …… 031
点拨 1 两个数列的相交项、合并项问题　点拨 2 数列的增减项问题

模块三 立体几何与空间向量

第 8 讲 空间几何体 …… 032
第 9 讲 球的切接问题 …… 034
第 10 讲 空间角的计算 …… 035
第 11 讲 空间距离与探索性问题 …… 039
第 12 讲 立体几何中的动态问题 …… 041

模块四 概率与统计

第 13 讲 排列组合与二项式定理 …… 043
第 14 讲 概率 …… 044
第 15 讲 随机变量的分布列及数字特征 …… 046
品点拨 5 马尔科夫链问题 …… 051
点拨 1 求第 n 次发生的概率　点拨 2 试验次数无限
点拨 3 求事件的个数的递推公式

品点拨 6 概率中的创新问题 …… 052
点拨 1　利用函数求解概率问题　　点拨 2　概率中的证明问题
第 16 讲　统计与成对数据的统计分析 …… 054

模块五　解析几何

第 17 讲　直线与圆 …… 058
第 18 讲　圆锥曲线的方程与性质 …… 061
第 19 讲　直线与圆锥曲线的位置关系 …… 063
第 20 讲　圆锥曲线的综合问题 …… 066
第 1 课时　定点问题与定值问题 …… 066
第 2 课时　定线问题与最值范围问题 …… 068
品点拨 7 圆锥曲线的二级结论及应用 …… 070
点拨 1　椭圆与双曲线的第二定义　　点拨 2　焦点三角形
点拨 3　焦半径与焦点弦
品点拨 8 圆锥曲线的创新问题 …… 073
点拨 1　圆锥曲线与数列的交汇问题　　点拨 2　圆锥曲线与三角的交汇问题
点拨 3　圆锥曲线与函数的交汇问题

模块六　函数与导数

第 21 讲　函数的图象与性质 …… 075
品点拨 9 抽象函数的性质 …… 077
点拨 1　抽象函数的奇偶性与对称性　　点拨 2　抽象函数的单调性
第 22 讲　应用导数求解函数问题 …… 078
第 23 讲　利用导数研究零点问题 …… 080
第 24 讲　利用导数求解不等式问题 …… 082
第 1 课时　利用导数研究不等式恒（能）成立问题 …… 082
第 2 课时　利用导数证明不等式 …… 084
品点拨 10 极值点偏移问题 …… 086
点拨 1　不含参数的极值点偏移问题　　点拨 2　含参数的极值点偏移问题
点拨 3　极值点偏移问题一题多解
品点拨 11 与函数、导数有关的创新问题 …… 089
点拨 1　与函数有关的创新探索问题　　点拨 2　与导数有关的创新探索问题
附录　关注教材中的素材挖掘拓展 …… 090

作业手册（请从后翻）/ 093
参考答案（另附分册）/ 164

02 特色专项（另附分册）

■ **考卷Ⅰ　小题·标准练**

“8+3+3”73分练（小题1~小题10）

■ **考卷Ⅱ　解答·标准练**

“15~17题”43分练（解答1~解答10）

“18题、19题”34分练（解答11~解答15）

03 短平快（另附分册）

■ **题型Ⅰ　小题·针对练**（小题1~小题27）

■ **题型Ⅱ　解答·针对练**（解答1~解答26）

■ **题型Ⅲ　教考衔接·拓展练**（拓展1~拓展10）

思想篇　数学思想方法的应用

思想一　函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点与方法来分析研究数学中的数量关系，通过建立函数关系或构造函数，运用函数图象和性质分析、转化和解决问题的一种思维策略．如求数列中的项或最值、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想转化为函数问题．

方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，或者构造方程，通过解方程或方程组，或运用方程的性质去分析、转化和解决问题的一种思维策略．如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题都可利用方程思想求解．

函数思想与方程思想密切相关：方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标；函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$，通过方程进行研究；方程 $f(x)=a$ 有解，当且仅当 a 属于函数 $f(x)$ 的值域．函数思想重在对问题进行动态的研究，方程思想则是在动中求静，研究“运动”中的等量关系．

典例精析

1. 已知圆锥的母线长为 4，则当圆锥的体积最大时，其表面积为（　　）

A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi+8\pi$

B. 16π

C. $\frac{32}{3}\pi+\frac{16\sqrt{6}}{3}\pi$

D. $8\sqrt{2}\pi+16\pi$

[解法关键]

设圆锥的底面半径为 $r(0<r<4)$，高为 h，则 $h=\sqrt{4^2-r^2}$，得圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{16r^4-r^6}$，令 $f(r)=16r^4-r^6(0<r<4)$，则 $f'(r)=64r^3-6r^5$，利用函数 $f(r)$ 的单调性，计算出圆锥的体积最大时 r 的值，再结合圆锥的表面积公式求解．

2. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2=3$，则 $4x-3y$ 的最大值为（　　）

A. 5　　B. $5\sqrt{3}$

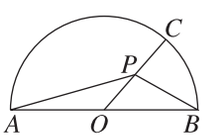
C. 7　　D. $7\sqrt{3}$

[解法关键]

设 $x=\sqrt{3}\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，将其代入 $4x-3y$，结合三角函数值域求解代数式的最值．

自测题

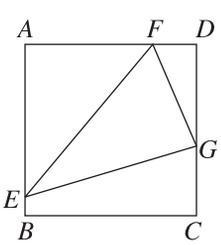
1. 如图，半圆的直径 $AB=8$，O 为圆心，C 为半圆上不同于 A，B 的任意一点，若 P 为半径 OC 上的动点（包含端点），则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为（　　）



A. -16　　B. -8

C. -4　　D. -2

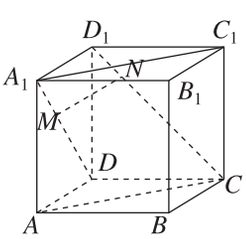
2. 如图，在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 中，E,F,G 分别是边 AB,AD,CD 上的动点（不含端点），若 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle GEF}=3$，则 $\frac{DG}{AF}$ 的最大值为（　　）



A. $\frac{32}{81}$　　B. $\frac{17}{27}$

C. $\frac{64}{81}$　　D. $\frac{16}{27}$

3. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DA_1}(0<\lambda<1)$，$\overrightarrow{CN}=\mu\overrightarrow{CD_1}(0<\mu<1)$，若 MN // 平面 AA_1C_1C，则线段 MN 的长度的取值范围为_____.



思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法. 数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面. 数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

典例精析

1. [2023·全国乙卷] 已知⊙O的半径为1，直线PA与⊙O相切于点A，直线PB与⊙O交于B，C两点，D为BC的中点，若$|PO|=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值为（　　）

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

[解法关键]

结合图形判断A，D两点相对于直线PO的位置关系，并判断$\angle OPC$的范围，进而求解.

2. [2026·山东青岛一模] 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x)+f(2-x)=0$，$f(1+x)=f(3-x)$，当$x\in[1,2]$时，$f(x)=2x-2$，则方程$7f(x)-x+1=0$所有根之和为（　　）

A. 8　　B. 11

C. 15　　D. 17

[解法关键]

(1)判断函数$f(x)$的性质：对称性、周期性等，并作出$f(x)$的图象；(2)将方程$7f(x)-x+1=0$的根的关系转化为函数$y=f(x)$与$y=\frac{1}{7}(x-1)$图象交点的位置关系进行求解.

3. 设函数$f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+x+1)$，则（　　）

A. $f(x)$的最小值为1

B. $f(x)$的最小值为$\sqrt{2}$

C. 方程$f(x)=1$有一个实根

D. 方程$f(x)=\sqrt{2}$有两个实根

[解法关键]

将$\sqrt{x^4-x^2+1}$和$\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+x+1)$都看作平面上的距离，最终将函数$f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+x+1)$的取值情况转化为抛物线上的点到定点与到定直线的距离之和的问题，并借助图象判断此距离的最值.

自测题

1. [2026·江苏南京模拟预测] 若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$在区间$(a-4,a)$内存在最小值，则实数a的值可以为（　　）

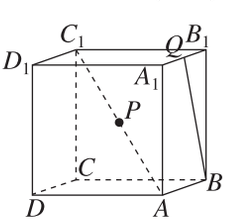
A. 0　　B. 2

C. 4　　D. 6

2. [2026·山东聊城模拟预测] 已知三棱锥P-ABC的顶点均在球O的表面上，且球心O在棱AB上，若球O的表面积为16π，则三棱锥P-ABC的体积的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. 2　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

3. (多选题)如图，在棱长为2的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，P，Q分别为AC_1，A_1B_1的中点，点T在正方体的表面上运动，满足$PT\perp BQ$，下列结论正确的有（　　）



A. 线段PT长度的最小值为1

B. 点P到直线BQ的距离为$\frac{\sqrt{30}}{5}$

C. 点T的轨迹是梯形

D. 点T的轨迹围成的多边形的面积为$2\sqrt{5}$

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略. 其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起. 使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论.

典例精析

1. [2026·甘肃兰州模拟预测] 已知集合 $A=\{1,2,a\}$，$B=\left\{a,\frac{a}{2}\right\}$，若 $B\subseteq A$，则 $\complement_A B=$　　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{2\}$

[解法关键]

首先确定两个集合的公共元素 a，排除 a 后由代数式 $\frac{a}{2}$ 可能取值 1，2 求出 a 的值.

2. 已知动点 P 到定点(1,0)和到定直线 $x=3$ 的距离之和为 4，则点 P 的轨迹方程为　　(　　)

A. $y^2=4x$

B. $y^2=-12(x-4)$

C. 若 $x\geqslant 3$，则 $y^2=4x$；若 $x<3$，则 $y^2=-12(x-4)$

D. 若 $x\leqslant 3$，则 $y^2=4x$；若 $x>3$，则 $y^2=-12(x-4)$

[解法关键]

求动点 P 到定直线 $x=3$ 的距离时，要注意点 P 可能在直线 $x=3$ 的左侧也可能在右侧，也就是对 $|x-3|$ 去掉绝对值时要注意分 $x>3$，$x\leqslant 3$ 两种情况讨论.

3. [2026·福建泉州模拟预测] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ a_{n-1}+n\sin\frac{n\pi}{2},n\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $a_{2026}=$　　(　　)

A. 1012　　B. 1013

C. 2025　　D. 2026

[解法关键]

确定 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 的周期为 4，令 $n=4k+1,4k+2,4k+3,4k+4,k\in\mathbf{N}$，在四种情况下分别求出 a_n 与 a_{n-1} 的递推式归纳出 $\{a_n\}$ 的表达式.

自测题

1. [2026·江苏南京三模] 已知 $f(x)=\begin{cases}ex,x\leqslant -1,\\ xe^x,x>-1,\end{cases}$ 则不等式 $f(2a+1)>e$ 的解集是　　(　　)

A. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　　D. $(-\infty,0)$

2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上至少有两个零点，则实数 ω 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$

B. $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right)\cup\left(\frac{11}{3},+\infty\right)$

D. $\left[\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right]\cup\left[\frac{11}{3},+\infty\right)$

3. 已知函数 $f(x)=x^2-(2a+1)x+a\ln x,a\in\mathbf{R}$ 在 $[1,e^2]$ 上的最小值为 $-2a$，则 a 的最大值为_____.

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究数学问题时，采用某种方法将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题，将较难的问题化归为较简单的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题，简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维容易求解的问题，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

典例精析

1. [2026·陕西西安三模] 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=AD=BC=3$，且 $AC=BD=2\sqrt{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积为 （　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{9}{2}$　　D. 3

[解法关键]

找到四面体 $ABCD$ 的外接长方体，将四面体 $ABCD$ 的体积转化为长方体体积和四个全等的并且其中一条侧棱垂直底面的三棱锥的体积差.

2. 已知函数 $f(x)=e^{2x}$，$g(x)=x+1$，对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，存在 $x_2\in(-1,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 x_2-x_1 的最小值为 （　）

A. $-\frac{1}{2}\ln 2$　　B. 1

C. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$　　D. $-2+\ln 2$

[解法关键]

将 x_2-x_1 的取值问题转化为函数 $h(m)=m-1-\frac{1}{2}\ln m(m>0)$ 的取值问题，并借助导数求解函数 $h(m)=m-1-\frac{1}{2}\ln m(m>0)$ 的最小值.

3. 点 M 是函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 图象上的动点，则点 M 到直线 $y=x+2$ 的距离的最小值为 （　）

A. $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2e}$　　B. $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2e}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[解法关键]

动点 M 到直线 $y=x+2$ 的距离为关于 x 的函数，不易求出. 可先求出与直线 $y=x+2$ 平行且与函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 图象相切的切线对应的切点坐标，该切点的坐标就是距离最小时点 M 的坐标，即可将“动距离”转化为“定距离”求解.

自测题

1. [2026·南昌模拟预测] 已知 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,1)$，$\overrightarrow{OC}=(3+t,3-t)$，若点 A，B，C 能构成三角形，则实数 t 的值不可能为 （　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. -2

C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

2. [2026·郑州模拟预测] 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=2\cos x$”是“$5\cos 2x+3=0$”的 （　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，若 $S_6>0$，$S_7<0$，则 $\frac{a_1}{d}$ 的取值范围是 （　）

A. $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$

B. $(-3,-2)$

C. $(-\infty,-3)$

D. $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$

方法篇 选择题的特殊解法

方法一 特例法

在解决选择题时，可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果，这种方法称为特例法. 特例法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、繁琐的演算过程，提高了解题的速度. 特例法是考试中解答选择题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的作用.

(1)使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两个或两个以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

典例精析

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},|x+1|>1$，命题 $q:\exists x>0,x^3=x$，则 (　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

[解法关键]

对于全称量词命题 p，举出一反例 $\left(x=-\frac{1}{2}\right)$ 判断原命题为假命题，对于存在量词命题 q，举出一例 $(x=1)$ 判断原命题为真命题.

2. [2026·北京海淀区三模] 在平面直角坐标系中，角 θ 的顶点在原点，始边与 x 轴正半轴重合，则“角 θ 的终边在第二象限”是“$\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

[解法关键]

令 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，得充分性不成立；通过赋值判定，当 θ 为除第二象限角外其他象限角和轴线角时 $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$ 不成立，所以仅第二象限角中存在 θ，使得 $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$ 成立.

3. [2025·全国一卷] 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能是 (　　)

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

[解法关键]

由题得 $\log_2 x-1=\log_3 y=\log_5 z+2=k$，即 $x=2^{k+1}$，$y=3^k$，$z=5^{k-2}$，对 k 进行不同的赋值，得到特定情况下 x,y,z 的大小关系即可排除错误选项，从而得到正确选项.

自测题

1. 已知 $-1<x<y<1$，则下列不等式一定成立的是 (　　)

A. $(x-y)(\sin x-\sin y)<0$

B. $(x-y)(\cos x-\cos y)<0$

C. $(x^2-y^2)(\sin^2 x-\sin^2 y)\leqslant 0$

D. $(x^2-y^2)(\cos^2 x-\cos^2 y)\leqslant 0$

2. [2026·江苏连云港模拟预测] 椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$ 与双曲线 $E:\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{2}=1$ 有公共的焦点 F_1,F_2，Q 为 C 与 E 的交点，则 $\triangle QF_1F_2$ 的面积为 (　　)

A. $m+n$　　B. $\frac{m+n}{2}$

C. 2　　D. 1

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=80$，则 $a_7-\frac{1}{2}a_8$ 的值为 (　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

方法二　验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件，然后选择符合题目条件的选项的一种方法. 在运用验证法解题时，若能根据题意确定代入顺序，则能提高解题速度.

(1)使用前提：各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧：可以结合特例法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获得答案.

(3)常见问题：题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算繁琐的问题等.

典例精析

1. [2026·广州模拟] 函数 $f(x)=\log_2(4^x+16^x)-3x$ 的图象 (　　)

A. 关于原点对称

B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $x=2$ 对称

D. 关于点(0,1)对称

[解法关键]

此题中 $f(x)$ 的定义域为 **R**，则可对 x 分别赋值 1，−1 和 3，并计算 $f(1)$，$f(-1)$ 和 $f(3)$ 的值，对选项进行逐一验证即可.

2. [2026·北京三模] 将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 3 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象. 再将 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合，则 $f(x)$ 的解析式可以是 (　　)

A. $f(x)=\log_3 x$

B. $f(x)=\log_3(3x+1)$

C. $f(x)=3^x$

D. $f(x)=3^{2x+1}$

[解法关键]

取特殊点，按照题意进行变换，对变换后的点是否在原函数图象上进行逐一验证.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=S_n+2$，则使得不等式 $S_n-(a_n-n)\geqslant k\cdot 2^n$ 成立的实数 k 的最大值为 (　　)

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. $\frac{9}{8}$

[解法关键]

先求得关于 k 的不等式 $k\leqslant 1+\frac{n-2}{2^n}$，再将选项中的值逐一代入，验证选项正误即可.

自测题

1. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{12}$，则 ω 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 4

C. 10　　D. 16

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+\sqrt{2}$，$a_1=8$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 (　　)

A. $a_n=2(n+1)^2$

B. $a_n=4(n+1)$

C. $a_n=8n^2$

D. $a_n=4n(n+1)$

3. 已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，则 a 的取值范围为 (　　)

A. [0,1]　　B. [0,2]

C. [0,e]　　D. [1,e]

4. 已知函数 $f(x)=-x^3-7x+\sin x$，若 $f(a^2)+f(a-2)>0$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,3)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-2,1)$

全品 SINCE 1992 — 30年专注教育行业

自习篇 基础知识自主练习

自习一 集合与常用逻辑用语

1. [2026·全国Ⅱ卷] 已知集合 $A=\{0,1,3,6,9\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}=x\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{3,6\}$

C. $\{0,1,9\}$　　D. $\{0,3,9\}$

2. [2025·全国一卷] 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于9的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为 （ ）

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 8

3. [2025·全国二卷] 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. [2026·安徽合肥三模] 设 $p:0<x<1,0<y<1$，$q:-1<x-y<1$，则 p 是 q 的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知命题 $p:\exists x\geqslant 0,x>\sqrt{x}$，命题 $q:\forall x\in\mathbf{R},x+|x|>0$，则 （ ）

A. p 和 q 都是真命题

B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

6. [2026·安徽皖北协作区联考] 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6\leqslant 0\}$，若 $a\in A$，且 $a+3\in A$，则 a 的取值范围是 （ ）

A. $[-2,3]$　　B. $[-3,-1]$

C. $[-2,0]$　　D. $[-3,2]$

7. 设 $\alpha:x\leqslant m$，$\beta:|x-2|\leqslant 1$，若 α 是 β 的必要条件，则实数 m 的取值范围是_____.

8. 已知 $m>0$，使得不等式 $\dfrac{2x+1}{x-m}\leqslant 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $-2\leqslant x\leqslant 4$，则 m 的取值范围是_____.

自习二 不等式

1. [2026·陕西西安模拟预测] 若“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+ax+a+3\geqslant 0$”为真命题，则实数 a 的取值范围是 （ ）

A. $[-6,2]$　　B. $[-6,-2]$

C. $[-2,6]$　　D. $[2-\sqrt{7},2+\sqrt{7}]$

2. [2026·北京昌平区二模] 设 $-1<x<0<y<1$，则下列不等式一定成立的是 （ ）

A. $\log_2|x|-\log_2|y|<0$

B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$

C. $x^2-y^2<0$

D. $\sin x-\sin y<0$

3. （多选题）[2026·山东日照模拟预测] 已知 $a>0,b>0$，则下列说法中正确的是 （ ）

A. 若 $a+\dfrac{b}{4}=1$，则 ab 的最大值为 1

B. $a+\dfrac{4}{a+3}$ 的最小值为 1

C. $a^2+b^2+\dfrac{8}{(a+b)^2}$ 的最小值为 4

D. 若 $a>2b$，则 $a+\dfrac{2}{a+2b}+\dfrac{1}{a-2b}$ 的最小值为 $2+\sqrt{2}$

4. （多选题）若正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$

B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值是 $\sqrt{2}$

C. $(1+a)(1+b)$ 的最大值是 $\frac{9}{4}$

D. a^2+2b^2 的最小值是 $\frac{3}{4}$

5. ［2026·河北沧州三模］不等式 $5x(x-2)\leqslant(x+1)^2-10$ 的解集为_____.

6. ［2026·福建南平二模］若 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{2a}{b}+b$ 的最小值为_____.

7. ［2026·天津武清区模拟预测］已知函数 $f(x)=x^2-ax$，当 $a\in[1,2]$ 时，对于任意 $x\in[1,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant -kx^2+4x+2k$ 恒成立，则 k 的取值范围为_____.

自习三　复数的四则运算与几何意义

1. ［2025·全国一卷］$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 6

2. ［2025·全国二卷］已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\frac{1}{z-1}=$（　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i

C. -1　　D. 1

3. ［2026·全国Ⅱ卷］$(1-3\mathrm{i})^2=$（　　）

A. $-8+6\mathrm{i}$　　B. $-8-6\mathrm{i}$

C. $8+6\mathrm{i}$　　D. $8-6\mathrm{i}$

4. 已知复数 z 满足 $z\bar{z}=2\mathrm{i}(1-z)$，则 $z=$（　　）

A. i　　B. $-\mathrm{i}$

C. $1+\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

5. ［2026·福建泉州模拟预测］已知复数 z_1，z_2 满足 $z_1=3+4\mathrm{i}$，$|z_2|=1$，若 $z=z_1+z_2$，则 z 可能等于（　　）

A. $-4+4\mathrm{i}$　　B. $3+4\mathrm{i}$

C. $4+4\mathrm{i}$　　D. $4+5\mathrm{i}$

6. （多选题）［2026·福建福州模拟预测］已知复数 z_1，$z_2(z_2\neq0)$ 在复平面内对应的点分别为 Z_1，Z_2，O 为坐标原点，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $z_1+z_2>0$，则 $z_1>-z_2$

B. 若 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $|z_1|=|z_2|$

C. 若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$

D. 若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，则 $z_1\cdot z_2=0$

7. （多选题）已知 z_1，z_2 为复数，则下列说法正确的是（　　）

A. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

B. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

C. 若 $|z_1+1|=|z_2+1|$，则 $z_1=z_2$

D. 若 $|z_1|>|z_2|$，则 $z_1^2>z_2^2$

8. 在复平面内，i 为虚数单位，$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 $4+5\mathrm{i}$，$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数是 $3+\mathrm{i}$，则 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数是_____.

9. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，复数 $z_1=a+b+ab\mathrm{i}$，$z_2=3+2\mathrm{i}$，i 为虚数单位，若 $z_1-z_2<0$，则 $\mathrm{Re}(z_1)$（z_1 的实部）的取值范围为_____.

模块一　三角函数、解三角形与平面向量

第 1 讲　三角恒等变换

【考情分析】

三角恒等变换是解决三角函数、解三角形等问题的主要工具，试题常常以选择、填空题的形式考查. 命题重点一是应用三角恒等变换进行“变形”，即应用“降幂公式”“辅助角公式”等，将表达式转化为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式进而求解问题；二是应用三角恒等变换进行“变角”，进而解决有关求值问题. 试题难度不大，复习备考要注重有关公式的熟练记忆和应用.

必备知识

1. 同角三角函数的有关公式

(1)基本关系式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(2)诱导公式

诱导公式口诀：奇变偶不变，符号看象限.

(3)$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 之间的关系

由 $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$ 可知，$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 这三个式子中，已知其中一个式子的值，可求另外两个式子的值.

2. 两角和与差的公式、二倍角公式

(1)常用公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$，

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

(2)三角求值“三大类型”

“给角求值”“给值求值”“给值求角”.

(3)三角恒等变换“四大策略”

①常值代换：常用到“1”的代换，例如 $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\tan 45^\circ$ 等.

②项的拆分与角的配凑：例如 $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha$，$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ 等.

③降幂与升幂：正用二倍角公式升幂，逆用二倍角公式降幂.

④弦、切互换.

3. 常见三角函数类型的处理方法或转化方向

(1)$y=a\sin x+b\cos x$ 型可通过辅助角公式化为 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\left(\text{其中 }\tan\varphi=\dfrac{b}{a}\right)$；

(2)$y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x$ 型可通过降次整理化为 $y=A\sin 2x+B\cos 2x+C$ 的形式，再用辅助角公式整理；

(3)$y=a\sin^2x+b\cos x+c$ 型可通过换元化为二次函数处理；

(4)$\sin x\cos x$ 与 $\sin x\pm\cos x$ 同时存在可换元转化；

(5)$y=a\sin x+\dfrac{c}{b\sin x}(a,b,c>0)$ 型可令 $t=\sin x$，再结合“对勾型”函数的性质处理.

考点 1　同角三角函数的基本关系、诱导公式

例 1 (1)[2026·重庆模拟] 已知 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$,则 $\frac{\sin 2\alpha-1}{2\sin^2\alpha-1}=$ (　　)

A. $\frac{1}{7}$　　B. 7

C. $-\frac{1}{7}$　　D. -7

(2)[2026·江西抚州二模] 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,且 $3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\alpha$,则 $\cos(2\alpha-2\pi)=$_____.

【规律提炼】

1. 应用同角三角函数的基本关系求解问题的关键:

(1)切、弦转化.若关系式中有切和弦,则常常应用商的关系将切化弦.而弦化切的关键是关系式为弦的齐次等式或分式.

(2)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 具有“隐身”功能,具体问题中要灵活应用.

2. 应用诱导公式的关键是充分理解口诀“奇变偶不变,符号看象限”,准确应用诱导公式正确变名和变号.

【巩固训练】

1. [2026·浙江金华三模] 已知 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$,则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$ (　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. 3

C. $\frac{1}{3}$或 3　　D. $-\frac{1}{3}$或 3

2. 已知 $2\cos(\pi-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$,且 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\tan\beta$ 的值为 (　　)

A. 7　　B. -7

C. -1　　D. 1

考点 2　三角恒等变换

例 2 (1)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{3}{5}$,则 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$_____.

(2)(多选题)[2026·安徽安庆模拟] 下列结论正确的是 (　　)

A. $\sin\left(\frac{9\pi+\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2}$

B. $\frac{\sin 43^\circ-\sin 13^\circ\cos 30^\circ}{\cos 13^\circ}=\frac{1}{2}$

C. 若 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$,则 $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$

D. 已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+\sqrt{3}x-2=0$ 的两根,且 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{6}$

【规律提炼】

应用三角恒等变换求解问题的关键:

(1)变角.利用已知角和特殊角表示所求角,注意若存在倍角关系,则应用二倍角公式进行变形求解.

(2)变形.要熟练掌握和应用两角和与差的正弦、余弦、正切公式和二倍角公式.具体问题中高次关系式往往先应用“降幂公式”降幂,然后根据情况进行各类变形应用.

【巩固训练】

1. [2025·全国二卷] 已知 $0<\alpha<\pi,\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

2. [2026·福建厦门二模] 已知函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$,若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立,则 $f\left(\frac{13\pi}{3}\right)=$ (　　)

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

第 2 讲　三角函数的图象与性质

【考情分析】

三角函数的图象与性质是高考必考内容，以选择题、填空题形式为主. 命题聚焦图象变换、函数性质和应用及简单含参问题，常结合三角恒等变换综合设问. 高频失分点为图象平移计算、参数条件遗漏. 备考需熟记公式，掌握整体代换法，准确掌握“五点法”作图，规范答题细节.

必备知识

1. 三角函数的性质

(1)奇偶性：当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 为奇函数，函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 为偶函数；当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 为奇函数.

(2)周期性：$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

(3)根据 $y=\sin t$ 的性质研究 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的性质：

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 可得单调递增区间，由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 可得单调递减区间；由 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 可得图象的对称中心；由 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 可得图象的对称轴.

2. 三角函数的图象变换

(1)先平移后伸缩：$y=\sin x\to y=\sin(x+\varphi)\to y=\sin(\omega x+\varphi)$.

(2)先伸缩后平移：$y=\sin x\to y=\sin\omega x\to y=\sin[\omega(x+\varphi)]$(注意平移时保证 x 的“系数”是 1).

考点探究

考点 1　三角函数的图象变换

例 1　(1)[2026·山东青岛模拟] 要得到函数 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象　(　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

(2)[2026·湖南岳阳二模] 将函数 $f(x)=\cos(x-\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 为奇函数，则 φ 可能的取值为　(　)

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【规律提炼】

关于三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的变换问题要注意两点：

(1)要明确是由哪个函数的图象平移得到哪个函数的图象，尤其要注意函数是否同名，若不同名，则应先用诱导公式进行变名；

(2)图象进行左右平移时，平移量是与 x 进行直接加减的量，图象进行周期变换时，伸缩量只影响 x 的系数，而不影响 φ.

【巩固训练】

1. [2026·武汉三模] 为了得到函数 $y=3\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=3\cos x$ 的图象上 （　）

A. 每个点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

B. 每个点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位长度

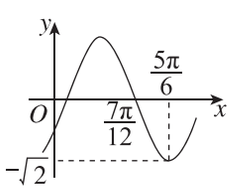
C. 每个点的横坐标伸长到原来的 4 倍，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

D. 每个点的横坐标伸长到原来的 4 倍，纵坐标不变，再向左平移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位长度

2. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g\left(\frac{5\pi}{2}\right)=$_____.

考点 2　三角函数的图象与解析式

例 2　函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $f(0)=$_____.



【规律提炼】

已知三角函数的图象求解析式问题的关键：

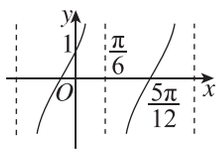
(1)准确掌握函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象特征，了解各个参数的意义，例如函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 A 决定函数的值域，ω 决定函数的周期等.

(2)具体问题中要能够灵活应用方程思想、数形结合思想求解参数.

(3)充分理解函数性质与函数图象之间的关系. 图象直观体现性质，性质决定图象特征，进而求解相关问题.

【巩固训练】

[2026·吉林长春模拟] 函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $A=$ （　）



A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{3}$

考点 3　三角函数的性质及其应用

例 3　(1)[2025·全国一卷] 已知点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的一个对称中心，则 a 的最小值为 （　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

(2)(多选题)已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 （　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

【规律提炼】

求解三角函数的性质和应用问题一般需要注意三个方面：

(1)数形结合. 图象是函数性质的直观体现，有些性质借助图象能直观体现，有助于解题.

(2)函数的解析式要变换成 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式. 具体问题中一般要应用三角恒等变换，将函数解析式进行降幂，并利用辅助角公式进行变形.

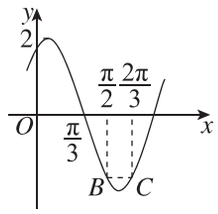
(3)整体思想的应用. 往往要将 $\omega x+\varphi$ 作为一个整体，求解 x 的取值范围或值，进而求解相应性质问题.

【巩固训练】

1. [2026·江西景德镇模拟] 若将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后所得图象关于 y 轴对称，则 ω 的最小值为 (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{2}$

2. (多选题)[2026·广东深圳模拟] 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，其中 $BC/\!/x$ 轴，则下列说法正确的是 (　　)



A. $f(x)$的最小正周期 $T=\pi$

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $f(x)$在$\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增

D. 将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到 $g(x)$的图象，则 $g(x)$为偶函数

品点拨1　三角函数中ω,φ的范围与最值问题

三角函数中 ω,φ 的范围与最值问题是高考高频考点，常以选择、填空压轴题出现. 命题结合图象、单调性、零点等条件约束参数，侧重考查数形结合与逻辑推理，题型灵活、区分度高，是三角函数板块的重难点.

点拨1　与对称性有关的问题

例1 (1)[2026·重庆模拟] 函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称，且直线 $y=1$ 与函数 $f(x)$的图象的相邻两交点间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则正实数 φ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期 T 满足$\frac{3\pi}{4}<T<\pi$，且该函数的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$中心对称，则 ω 的值为_____.

【技巧点拨】

求解与对称性有关的问题，主要是应用整体代换的方法，令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 或 $k\pi$ 或$\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，进而求解参数值，其中参数 ω 与函数的周期有关，应用函数的周期性可求解其值.

点拨2　与单调性有关的问题

例2 (1)[2025·天津卷] $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$ 在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，且直线 $x=\frac{\pi}{12}$为 $f(x)$图象的一条对称轴，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是 $f(x)$图象的一个对称中心，则当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)$的最小值为 (　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 0

(2)已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，若函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有且仅有一个最大值点，则 ω 的取值范围为_____.

【技巧点拨】

若函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 在区间$[m,n]$上单调，则有两种思考方向，一是满足$\frac{T}{2}\geqslant n-m$，可求得参数 ω 的范围. 二是应用整体代换思想，

由 x 的范围可得 $\omega m+\varphi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\omega m+\varphi$，然后采用区间嵌套的方式，即其范围是正弦函数单调区间的子集，进而求解不等式，得到参数范围.

点拨 3　与零点有关的问题

例 3　(1)[2026·广东佛山一模] 若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[\pi,3\pi]$ 上至少有 2 个零点，则 ω 的最小值是_____.

(2)已知函数 $f(x)=\sin(\pi-\omega x)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega x\right)(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 内无零点，则 ω 的取值范围为_____.

【技巧点拨】

求解与零点有关的问题的关键：

(1)应用整体代换的思想，由 x 的范围可得 $\omega x+\varphi$ 的范围，若一端为定量，另一端为变量，则通过调整变量与所给区间端点的关系，结合零点个数，求解参数范围.

(2)要注重数形结合思想的应用. 相邻零点间距离为 $\frac{T}{2}$；零点与相邻最值点间距离为 $\frac{T}{4}$. 注意区间端点是否能取到.

(3)要注意分类讨论思想的应用，例如 $\begin{cases}\omega\geqslant 3k-1,\\ \omega\leqslant k+\frac{2}{3},\end{cases}$ 对 k 的取值要进行分类讨论，在满足不等式的解集不为空集的情况下，ω 最终的取值为各种情况下取值的并集.

第 3 讲　平面向量

【考情分析】

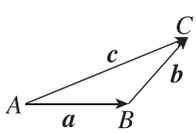
平面向量是高考数学必考内容，兼具代数与几何双重属性，主要以选择题和填空题的形式考查. 试题整体难度以基础、中档为主，极少出现难题，常单独命题或与解析几何、三角函数综合考查，是高考稳分的关键板块. 备考要侧重熟练掌握线性运算、坐标运算、数量积、模、夹角及平行垂直判定，保证计算零失误.

必备知识

1. 平面向量的线性运算

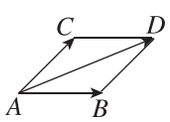
(1)加法：

①三角形法则(如图)



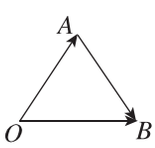
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，与物理中的位移相联系.

②平行四边形法则(如图)



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，与物理中的力的合成分解相联系.

(2)减法(如图)：



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，与物理中的位移相联系.

(3)数乘：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

2. 平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，我们把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 叫作表示这一平面内所有向量的一个基底.

3. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$O$ 是平面上的任意一点，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. 平面向量线性运算的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

(1)加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$；

(2)减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$；

(3)数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

5. 平面向量的数量积

(1)若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$.

重要结论：$|\boldsymbol{b}|\cdot|\cos\theta|$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的长度.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

6. 两个非零向量平行、垂直的充要条件

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

(1)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$；

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

7. 利用数量积求长度

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$.

(3)若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

8. 利用数量积求夹角

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

考点探究

考点 1　基本定理

例 1 (1)[2026·湖南长沙二模] 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，则 (　　)

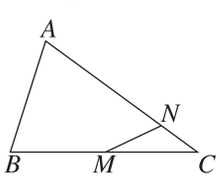
A. A，C，D 三点共线

B. A，B，C 三点共线

C. A，B，D 三点共线

D. B，C，D 三点共线

(2)[2026·北京朝阳二模] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 为线段 BC 的中点，$\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{MN}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}(k_1,k_2\in\mathbf{R})$，则 $\dfrac{k_1}{k_2}=$ (　　)



A. -2　　B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 2

【规律提炼】

向量共线定理和平面向量基本定理要掌握如下内容：

(1)向量共线定理的核心为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\boldsymbol{a}$ 为非零向量)，A，B，C 三点共线可转化为 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 且 $x+y=1$，常用于快速求参数.

(2)平面向量基本定理要求作为基底的两向量不共线，平面内任意向量都可唯一分解为基底的线性组合，进而可依据系数相等列方程解题.

(3)高考常将两定理结合考查，先利用基本定理分解向量，再借助共线定理列式求解. 解题需注意基底不能共线，规避坐标运算分式漏解等易错点.

【巩固训练】

1. [2026·广东深圳模拟] 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}$，若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，则 (　　)

A. $x=-1$　　B. $x=-\dfrac{1}{4}$

C. $x=\dfrac{1}{4}$　　D. $x=1$

2. [2026·湖北孝感二模] 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，若 $\overrightarrow{AB}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$(其中 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$)，且 A，B，C 三点共线，则 $\lambda_1\lambda_2$ 的值是 (　　)

A. -1　　B. 1

C. -2　　D. 2

考点2　平面向量的数量积

例2 (1)[2023·全国乙卷] 正方形 $ABCD$ 的边长是2，E 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=$　　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

(2)[2026·山东泰安模拟] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$\boldsymbol{c}=\left(\frac{2}{x},x\right)$，则　　(　　)

A. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $x=1$

B. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $x=\sqrt{6}$

C. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{b}$

D. $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为 $\sqrt{5}-2$

【规律提炼】

向量数量积要注重以下内容：

(1)向量数量积的核心公式为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，坐标形式为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

(2)两向量垂直等价于数量积为0；平行可结合夹角为0°或180°计算. 模的问题通常利用 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ 转化为数量积求解. 考查方向多为求值、求夹角、求最值与范围，可结合几何图形、函数性质解题.

(3)运算遵循分配律、交换律，注意不满足结合律. 解题优先选择坐标法或基底法，遇到夹角、投影问题紧扣定义，警惕角度范围与运算误区.

【巩固训练】

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

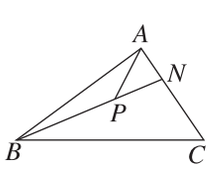
A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

2. 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，若 $|\boldsymbol{a}|=2$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$　　(　　)

A. 0　　B. 4　　C. 6　　D. 8

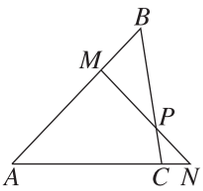
考点3　参数的取值(范围)

例3 (1)[2026·辽宁沈阳三模] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上一点，若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$，则实数 m 的值为　　(　　)



A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 1

(2)[2026·河北衡水模拟] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}$，过点 P 的直线与 AB，AC 所在的直线分别交于点 M，N，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}$($\lambda>0$，$\mu>0$)，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为　　(　　)



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$

【规律提炼】

求解平面向量的参数值和范围问题的关键点：

(1)参数求值常结合共线、垂直、数量积、向量分解求解. 利用共线的系数关系、垂直向量的数量积为0、基底分解系数对应相等等条件列方程是常见解题方法.

(2)参数范围与最值主要依托模、数量积、夹角转化求解，常结合二次函数、基本不等式或几何意义分析.

(3)三点共线、图形分点是高频载体，可通过消元将多参数化为单变量. 解题优先选坐标法以简化计算，要特别注意向量夹角、基底限制等隐含条件，进而可结合函数单调性或几何轨迹确定参数取值范围.

【巩固训练】

1. [2026·湖北武汉二模] 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$，$OC\perp AB$ 于点 C，且 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda-\mu=$　　(　　)

A. -1　　B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. 1

2. [2026·湖南长沙一模] 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 的直线与边 AB，AC 分别交于点 M，N，若 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$，则 x^2y 的最大值为　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{27}{8}$

C. 4　　D. $\frac{81}{16}$